(86) 18/12

<u>Πρόταση 1</u>

Ας είναι C, T υποσύνολα ενός μ.χ.: C συνεκτικό κ $C \subseteq T \subseteq \bar{C}$

Τότε T είναι συνεκτικό

<u>Πόρισμα</u>

Αν C συνεκτικό, τότε κ το $\bar{C}$ είναι συνεκτικό $(C \subseteq \bar{C} \subseteq \bar{C})$

<u>Απόδ. πρότ. 1</u>

Έστω ότι T είναι μη συνεκτικό. Άρα υπάρχει ανοιχτή εν E κάλυψη $\{A,B\}$ του T: $T \cap A \neq \emptyset \neq T \cap B$ κ $T \cap A \cap B = \emptyset$. Ισχύει $C \subseteq T \subseteq A \cup B$

Άρα η $\{A,B\}$ είναι κάλυψη του C.

Θεωρούμε α, β εν E με $\alpha \in T \cap A$ κ $\beta \in T \cap B$

$\alpha \in T \wedge \alpha \in A \xRightarrow{T \subseteq \bar{C}} \alpha \in \bar{C} \wedge \alpha \in A \xRightarrow[\text{περιοχή του } \alpha]{A \text{ ανοιχτό άρα}} C \cap A \neq \emptyset$

Ομοίως, για $\beta \in T \wedge \beta \in B$ έχω: $C \cap B \neq \emptyset$

$\left.\begin{matrix} C \cap A \neq \emptyset \\ C \cap B \neq \emptyset \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B$

C συνεκτικό. Άρα $C \cap A \cap B \neq \emptyset \xRightarrow{C \cap A \cap B \subseteq T \cap A \cap B} T \cap A \cap B \neq \emptyset$ ΑΤΟΠΟ

<u>Άσκηση</u>

Έστω $C_i, i \in I$ οικογένεια συνεκτικών συνόλων σ' ένα μ.χ. τέτοια ώστε $(\exists \alpha \in I)(\forall i \in I): C_\alpha \cap C_i \neq \emptyset$. Ν.δ.ο. $\bigcup_{i \in I} C_i$ συνεκτικό

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρώ x, y τυχόντα εν $\bigcup_{i \in I} C_i$. Τότε υπάρχουν δείκτες i, j εν I με $x \in C_i$ κ $y \in C_j$

$C_i \cap C_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow C_i \cup C_\alpha$ συνεκτ. κ $x \in C_i \cup C_\alpha$

$(C_i \cup C_\alpha) \cap C_j = (C_i \cap C_j) \cup (C_\alpha \cap C_j) = \emptyset \Rightarrow C_i \cup C_\alpha \cup C_j$ συνεκτ. υποσύνολο της $\bigcup_{i \in I} C_i$

με $x \in C_i \cup C_\alpha \cup C_j$ κ $y \in C_i \cup C_\alpha \cup C_j$

(E, ρ) μ.χ. $\underset{\text{συν}}{f}: E \to \mathbb{R}$, $S \subseteq E$, α, β εν S: $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε

$(\forall c \in \mathbb{R})(f(\alpha) < c < f(\beta))(\exists x_0 \in S): f(x_0) = c$

<u>Απόδειξη</u>

f συνεχής κ S συνεκτικό $\Rightarrow f(S)$ συνεκτ. $\xRightarrow{f(S) \subseteq \mathbb{R}} f(S)$ διάστημα

$f(\alpha), f(\beta)$ είναι στοιχεία του διαστήματος $f(S) \Rightarrow [f(\alpha), f(\beta)] \subseteq f(S) \Rightarrow$

$c \in f(S) \Rightarrow (\exists x_0 \in S): f(x_0) = c$

Άσκηση

$$(E,\rho) \text{ συνεκτικός} \Leftrightarrow \underbrace{\nexists f_{\text{συν.}} : E \to \mathbb{R} \text{ με } \mathcal{R}(f)=\{\alpha,\beta\},\ \alpha\neq\beta}_{(*)}$$

Απόδειξη

($\Longrightarrow$) Έστω E συνεκτικός κ δεν ισχύει το (*)

Όμως $\mathcal{R}(f)$ θα είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{R}(f)$ διάστημα ΑΤΟΠΟ

($\Longleftarrow$) Έστω ισχύει το (*) κ ο E μη συνεκτικός.

Άρα υπάρχει $A\neq\emptyset$, $A\subset E$, A ανοιχτό κ κλειστό

$\chi_A : E\to\mathbb{R}$, $\mathcal{R}(f)=\{0,1\}$ με $\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in A^c\end{cases}$

Θ.δ.ο. χ_A συνεχής. Έστω $C\subseteq\mathbb{R}$, C ανοιχτό

$$\left.\begin{array}{lll} 1\in C,\ 0\in C \Rightarrow \chi_A^{-1}(C)=A\cup A^c=E & \text{ανοιχτό} \\ 1\in C,\ 0\notin C \Rightarrow \chi_A^{-1}(C)=A & \text{ανοιχτό} \\ 1\notin C,\ 0\in C \Rightarrow \chi_A^{-1}(C)=A^c & \text{ανοιχτό} \\ 1\notin C,\ 0\notin C \Rightarrow \chi_A^{-1}(C)=\emptyset & \text{ανοιχτό}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{άρα } \chi_A \text{ συνεχής, ΑΤΟΠΟ}$$

Άσκηση

Έστω S συνεκτικό σύνολο σ' ένα μ.χ. Αν το S έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία, τότε το S είναι υπεραριθμήσιμο

Απόδειξη

Ας είναι α,β εν S, $\alpha\neq\beta$. Θεωρώ συνάρτ. $f(x)=\rho(\alpha,x)$, $x\in S$ με $f_{\text{συνεχ.}} : S\to\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(S)$ διάστημα.

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)=0\in f(S) \\ f(\beta)=\rho(\alpha,\beta)=c\in f(S),\ c>0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Άρα } [0,c]\subseteq f(S) \Rightarrow f(S) \text{ υπεραριθμήσιμο} \Rightarrow S \gtrsim f(S)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Ν.δ.ο. η $f_{\text{συν.}} : S_{\text{συνεκτ.}} \to E$ διακρ. μ.χ. είναι πάντα σταθερή

Άσκηση

I διάστημα στο $\mathbb{R}$, $f_{\text{συν.}} : I\to\mathbb{R}$. Ν.δ.ο. το γράφημα της f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ $(G_f=\{(x,f(x)) : x\in I\}\subseteq\mathbb{R}^2)$

Απόδειξη

I συνεκτικό, $g : I \xrightarrow{\text{επί}} G_f$ με $g(x)=(x,f(x))$, $x\in I \Rightarrow g$ συνεχής

ή αλλιώς $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν I : $\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim g(x_\nu)=(\lim x_\nu, \lim f(x_\nu)) = (x_0, f(x_0)) = g(x_0)$

άρα συνεχής

άρα το $G_f\subseteq\mathbb{R}^2$ με G_f συνεκτικό